СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ПЛАНОВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ СУДОВЫХ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Барщевский Г.Е.

Санкт-Петербургский государственный университет водных коммуникаций

Аннотация

В статье рассматривается синтез непрерывных симметричных планов вычислительного эксперимента четвертого порядка. При этом рассматривается случай, когда аппроксимируемая полиномиальная модель пятого порядка, а аппроксимирующая-четвертого.

Ключевые слова

Полином, синтез, электроэнергетическая система.

Abstract

The article deals with the synthesis of continuous symmetrical plans of computer simulation of the fourth order. In this case we consider the case when the approximated polynomial model of the fifth order, and approximating to the fourth.

Keywords

Polynomial, synthesis, electrical power system

Постановка задачи: Планы вычислительного эксперимента (ПВЭ) для определения полиномиальных моделей (ПМ) сложных электроэнергетических систем ЭЭС должны удовлетворять самым разнообразным требованиям, среди которых основным является минимум ошибки аппроксимации. В работе [2] были получены необходимые и достаточные условия оптимальной аппроксимации полиномиальных моделей. Исходя из этих условий, может быть осуществлён синтез симметричных непрерывных планов, спектр которых содержит сравнительно небольшое число точек. На основе указанных планов могут быть получены полиномиальные модели ЭЭС четвертого порядка, обеспечивающие достаточно высокую точность аппроксимации.

Условия оптимальности аппроксимации наиболее просто могут быть удовлетворены при разработке непрерывных планов вычислительного эксперимента. Пусть ЭЭС характеризуется параметрами $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$. Непрерывным нормированным планом называется совокупность величин вида:

$$E = \begin{Bmatrix} \vec{x}_1^{(1)} & \ldots & \vec{x}^{(u)} & \ldots & \vec{x}^{(N)} \\ \xi_1 & \ldots & \xi_u & \ldots & \xi_N \end{Bmatrix}; \; x_u \in Q,$$

где x_u – значения параметров ЭЭС в различных точках спектра плана; ξ_u – величины, называемые относительными весами или частотами проведения наблюдений (эксперимента) в соответствующих точках плана; Q – область изменения параметров.

Частоты наблюдения эксперимента ξ_u представляют собой долю наблюдений в u$^{\text{ой}}$ точке при общем числе наблюдений, принятом за единицу. Соответственно наблюдается равенство: $\sum_{u=1}^{N} \xi_u = 1$.

Как известно, при расчетах на персональных компьютерах (ПК) в одних и тех же точках спектра плана обеспечивается полная повторяемость результатов. Поэтому при использовании непрерывных планов вычислительного эксперимента (ПВЭ) отпадает необходимость в поиске соответствующих дискретных планов. Учет частот проведения ВЭ при разработке осуществляется путем использования обобщенного критерия наименьших квадратов, предусматривающего минимизацию суммы взвешенных квадратов отклонений:

$$\sum_{u=1}^{N} \xi_u [K(\vec{x}_u) - \hat{K}(\vec{x}_u)]^2 \qquad 1)$$

где $K(\vec{x}_u)$ и $\hat{K}(\vec{x}_u)$ – значения показателей в u$^{\text{ой}}$ спектра плана, полученных соответственно в результате ВЭ и на основе ПМ.

Приравнивая к нулю произведение от суммы (1) и переходя к матричной форме записи, можно представить выражения для векторов коэффициентов ПМ в виде:

$$\vec{B} = (Q^T * \xi * Q)^{-1} * \xi * \vec{K}, \quad (2)$$

где Q – информационная матрица (матрица моментов) ПВЭ.

$\vec{K}$ – вектор-столбец значений показателей в точках спектра ПВЭ.

$\xi = diag\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N\}$ – диагональная матрица частот проведения эксперимента.

Симметричные ПВЭ, как правило, состоят из отдельных симметричных конфигураций, которые представляют подмножества точек спектра плана, соответствующие характерным точкам правильных геометрических фигур, в частности вершинам или центрам граней гиперкуба, звездным или центральным (нулевым) точкам.

Задача синтеза непрерывных симметричных планов заключается в выборе типовых конфигураций, определения их размеров и частоты проведения экспериментов в точках спектров отдельных конфигураций, исходя из условий оптимальности, определяемых выбранным критерием. При этом предполагается, что точки спектра одной конфигурации имеют одинаковую частоту проведения экспериментов.

Нечетные моменты симметричных композиционных планов равны нулю, а величины четных моментов будут зависеть от видов конфигураций, входящих в план, частот проведения экспериментов в точках спектров этих конфигураций и от числа исследуемых параметров. Однако определение отдельных условий оптимальности для всех типов планов, составленных из всевозможных сочетаний типовых симметричных конфигураций, не представляется целесообразным. Поэтому для получения условий оптимальности ПВЭ в наиболее общем виде целесообразно использовать характеристики типовых конфигураций, значения которых зависят только от числа исследуемых факторов. Тогда все моменты плана, а следовательно и условий оптимальности, могут быть выражены через частоты проведения экспериментов в точках спектров этих конфигураций и значения их характеристик.

Синтез ПФЭ четвёртого порядка. Рассмотрим случай, когда аппроксимируемая ПМ есть полный полином пятого порядка, а аппроксимирующая ПМ – четвёртого порядка. Построим оптимальный план на два фактора для полинома четвёртого порядка, который по точности максимально приближался бы к полиному пятого порядка. Используем для этого следующую конфигурацию: 1 Гиперкуб + 1 Крест + 3 звездных точки.

В результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 4*a_1^8*\xi_1+8*a_{21}^4*a_{22}^4*\xi_2=\alpha_{44} & (3)\\ 4*a_1^8*\xi_1+4*a_{21}^6*a_{22}^2*\xi_2+4*a_{21}^2*a_{22}^6*\xi_2=\alpha_{62} & (4)\\ 4*a_1^6*\xi_1+4*a_{21}^4*a_{22}^2*\xi_2+4*a_{21}^2*a_{22}^4*\xi_2=\alpha_{42} & (5)\\ 4*a_1^4*\xi_1+8*a_{21}^2*a_{22}^2*\xi_2=\alpha_{24} & (6)\\ 4*a_1^2\xi_1+4*(a_{21}^2+a_{22}^2)*\xi_2+a_3^2*\xi_3+2*a_4^2*\xi_4+2*a_5^2*\xi_5=\alpha_2 & (7)\\ 4*a_1^4\xi_1+4*(a_{21}^4+a_{22}^4)*\xi_2+2*a_3^4*\xi_3+2*a_4^4*\xi_4+2*a_5^2*\xi_5=\alpha_4 & (8)\\ 4*a_1^6\xi_1+4*(a_{21}^6+a_{22}^6)*\xi_2+2*a_3^6*\xi_3+2*a_4^6*\xi_4+2*a_5^2*\xi_5=\alpha_6 & (9)\\ 4*a_1^8\xi_1+4*(a_{21}^8+a_{22}^8)*\xi_2+2*a_3^8*\xi_3+2*a_4^8*\xi_4+2*a_5^2*\xi_5=\alpha_8 & (10) \end{cases}$$

В этих восьми уравнениях 11 неизвестных, это позволяет упростить решение и решать их раздельно, а не все сразу. Разбиваем систему на 2 части: (3) – (6) и (7) – (10) уравнения. Так как у (3) – (6) уравнений есть только $a_1, a_{21}, a_{22}, \xi_1, \xi_2$, то решим сначала в этой системе уравнений первые 4 уравнения. Для начала выразим частоты проведения эксперимента в отдельных конфигурациях $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ и ξ_5 через размеры конфигураций плана – a.

Выражаем частоты проведения эксперимента ξ_1 и ξ_2:

$$\xi_1=\frac{\alpha_{44}-\alpha_{22}*a_{21}^2*a_{22}^2}{4*a_1^4*(a_1^4-a_{21}^2*a_{22}^2)}$$

$$\xi_2=\frac{\alpha_{22}*a_1^4-\alpha_{44}}{8*a_{21}^2*a_{22}^2*(a_1^4-a_{21}^2*a_{22}^2)}$$

На основе (5) уравнения численным методом нахожу a_1, a_{21}, a_{22}, при условии, что ξ>0. В результате получилось несколько вариантов решения. Из полученных вариантов было решено выбрать то решение, где $a_1 = 1$.

Обозначим приведенные моменты в последних четырёх уравнениях к $\alpha^{'}$ следующим образом:

$$\alpha_2^{'} = \alpha_2 - (4 * a_1^2 \xi_1 + 4 * (a_{21}^2 + a_{22}^2) * \xi_2)$$

$$\alpha_4^{'} = \alpha_4 - (4 * a_1^4 \xi_1 + 4 * (a_{21}^4 + a_{22}^4) * \xi_2)$$

$$\alpha_6^{'} = \alpha_6 - (4 * a_1^6 \xi_1 + 4 * (a_{21}^6 + a_{22}^6) * \xi_2)$$

$$\alpha_8^{'} = \alpha_8 - (4 * a_1^8 \xi_1 + 4 * (a_{21}^8 + a_{22}^8) * \xi_2)$$

Преобразуем последние четыре уравнения к виду $\alpha^{'}$ и решаем их:

$$2 * a_3^2 * \xi_3 + 2 * a_4^2 * \xi_4 + 2 * a_5^2 * \xi_5 = \alpha_2^{'} \qquad (7')$$

$$2 * a_3^4 * \xi_3 + 2 * a_4^4 * \xi_4 + 2 * a_5^2 * \xi_5 = \alpha_4^{'} \qquad (8')$$

$$2 * a_3^6 * \xi_3 + 2 * a_4^6 * \xi_4 + 2 * a_5^2 * \xi_5 = \alpha_6^{'} \qquad (9')$$

$$2 * a_3^8 * \xi_3 + 2 * a_4^8 * \xi_4 + 2 * a_5^2 * \xi_5 = \alpha_8^{'} \qquad (10')$$

Тогда выражения для частот проведения эксперимента для ξ_3, ξ_4 и ξ_5 будут представлены следующем образом:

$$\xi_3 = \frac{\alpha_4^{'} - \alpha_2^{'} - 2 * a_4^2 * \xi_4 * (a_4^2 - 1) - 2 * a_5^2 * \xi_5 * (a_5^2 - 1)}{2 * a_3^2 * (a_3^2 - 1)}$$

$$\xi_4 = \frac{\alpha_6^{'} * (a_3^2 - 1) - a_3^4 * (\alpha_4^{'} - \alpha_2^{'}) + 2 * \xi_5 * (a_3^4 * a_5^2 * (a_5^2 - 1) - a_5^6 * (a_3^2 - 1))}{2 * a_4^2 * (a_4^4 * (a_3^2 - 1) - a_3^4 * (a_4^2 - 1))}$$

$$\xi_5 = \frac{(a_4^4 (a_3^2 - 1) - a_3^4 (a_3^2 - 1))(\alpha_8^{'} (a_3^2 - 1) - a_3^6 (\alpha_4^{'} - \alpha_2^{'})) +}{2(a_4^4 (a_3^2 - 1) - a_3^4 (a_4^2 - 1))(a_5^8 (a_3^2 - 1) - a_3^6 a_5^2 (a_5^2 - 1)) +}$$

$$\frac{+ (\alpha_6^{'} (a_3^2 - 1) - a_3^4 (\alpha_4^{'} - \alpha_2^{'}))(a_3^6 (a_4^2 - 1) - a_4^6 (a_3^2 - 1))}{+ 2(a_3^4 a_5^2 (a_5^2 - 1) - a_5^6 (a_3^2 - 1))(a_4^6 (a_3^2 - 1) - a_3^6 (a_4^2 - 1))}$$

Решение (7') – (10') уравнения производится численным методом, нахожу a_3, a_4, a_5, при условии, что ξ>0. В результате получилось несколько вариантов решения. Из полученных вариантов было решено выбрать то решение, где $a_3 = 1$.

Выведя в аналитическом виде ξ для конфигурации 1 ГК + 1 КР +3 ЗТ для двух факторов можно посчитать параметры ξ и a (табл. 1).

Таблица 1

$a_1 = 1$	$\xi_1 = 0{,}004902$
$a_{21} = 0{,}84754$	$\xi_2 = 0{,}051323$
$a_{22} = 0{,}55699$	
$a_3 = 0{,}40492$	$\xi_3 = 0{,}131669$
$a_4 = 0{,}81195$	$\xi_4 = 0{,}026188$
$a_5 = 1$	$\xi_5 = 0{,}012429$

Аналогичным образом могут быть получены выражения, позволяющие строить оптимальные планы для трёх и более факторов четвертого порядка, для оптимальной идентификации процессов в ЭЭС.

Литература

1. Зубарев Ю.Я., Гаскаров В.Д., Удалой В.А., Зубарев В.Ю. Планирование вычислительного эксперимента в электроэнергетике. СПб.: Энергоатомиздат, Санкт-Петербургское отделение, 2000. – 328 с.

2. Барщевский Е.Г., Зубарев Ю. Я. Основы вычислительного эксперимента. – СПб.: СПГУВК, 2008. –156 с.

Рецензент проф. Арефьев И.Б.