СИНТЕЗ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПЛАНОВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ДЛЯ СУДОВЫХ ЭЛЕКТРОЭНЕГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Барщевский Г.Е.

Санкт-Петербургский государственный университет водных коммуникаций

Аннотация

В статье рассмотрен синтез ортогональных планов для определения полиномиальных моделей судовых технических систем. Получена полиномиальная модель третьего порядка, описывающая взаимосвязь между параметрами исследуемой СТС и показателями качества процессов.

Ключевые слова

Ортогональные планы, вычислительный эксперимент, электроэнергетическая система.

Abstract

This article describes the synthesis of orthogonal plans for the determination of the polynomial models of marine engineering systems. We obtain a third order polynomial model describing the relationship between parameters investigated STS and the refractive quality of processes.

Keywords

Orthogonal plans, computer out experiment, electric power system

При вероятностном анализе СТС достаточно часто возникает задача исследования влияния параметров в достаточно широком диапазоне их изменения. В этих случаях использование полиномиальных моделей второго порядка может привести к достаточно существенным погрешностям расчетов. Поэтому возникает задача определения полиномиальных моделей показателей третьего порядка, полученных на основе ортогональных непрерывных симметричных планов вычислительного эксперимента.

В работе [2] были получены необходимые и достаточные условиями ортогональности планов третьего порядка, поэтому информационную матрицу ортогонального плана третьего порядка можно представить в виде (1).

$$M=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc} 1 & \vec{x}_i & \vec{x}_{ij} & \vec{x}_{ii}^{(1)} & \vec{x}_{iii}^{(1)} & \vec{x}_{ijj}^{(1)} & \vec{x}_{ijk} \end{array}\\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \varphi E_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \varphi^2 E_{\frac{n(n-1)}{2}} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \varphi(\lambda\eta-\varphi)E_n & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda_6-\varphi\eta^2)E_n & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi^2(\eta-\varphi^3)E_{n(n-1)} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi^3 E_{C_n^3} \end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c} 1\\ \vec{x}_i\\ \vec{x}_{ij}\\ \vec{x}_{ii}^{(1)}\\ \vec{x}_{iii}^{(1)}\\ \vec{x}_{ijj}^{(1)}\\ \vec{x}_{ijk} \end{array} \qquad (1)$$

Следует отметить, что структура планов существенно отличается для случаев, когда число исследуемых параметров n=2 и n>2. Последнее объясняется тем, что при n=2 существуют только конфигурации, соответствующие вершинам гиперкуба и комплекта m звездных точек. Поэтому ортогональные планы третьего порядка для n=2 обычно содержат три конфигурации, содержащие вершины двух гиперкубов (в данном случае квадратов) и комплектов звездных точек. Кроме того, двухфакторные модели, как известно, не содержат слагаемые, соответствующие тройным произведениям исследуемых параметров.

Рассмотрим ортогональные планы третьего порядка для n>2. Если полиномиальная модель представляет собой полный полином третьего порядка, то план должен включать, по крайней мере, три конфигурации. Для сокращения числа точек спектра плана удобно пользоваться гиперкубами и звездными точками различных размеров. Однако у этих конфигураций шестые моменты типа λ24 и λ222 не отличаются друг от друга. Ввиду того, что условия ортогональности планов включают уравнения (20) [2] и (21) [2] необходимо, кроме вышеуказанных конфигураций, включать одну из конфигураций, не обладающих указанным недостатком, в частности середины ребер, центры двумерных граней или ядро Бокса-Бенкина.

Будем считать, что, по крайней мере, у одной из первых двух конфигураций моменты λ24 и λ222 отличаются друг от друга. В качестве третьей конфигурации возьмем комплект звездных точек.

Условия ортогональности в этом случае с учетом значений N_{l1}, N_{l2}, N_{l3} можно записать следующим образом:

$$N_1 a_1^2 \xi_1 + N_{21} a_2^2 \xi_2 + 2a_3^2 \xi_3 = \varphi \tag{2}$$

$$N_1 a_1^4 \xi_1 + N_{21} a_2^4 \xi_2 + 2a_3^4 \xi_3 = \eta\varphi \tag{3}$$

$$N_1 a_1^4 \xi_1 + N_{22} a_2^4 \xi_2 = \varphi^2 \tag{4}$$

$$N_1 a_1^6 \xi_1 + N_{22} a_2^6 \xi_2 = \eta\varphi^2 \tag{5}$$

$$N_1 a_1^6 \xi_1 + N_{23} a_2^6 \xi_3 = \varphi^3 \tag{6}$$

Решив уравнения (5) – (6), получим следующие выражения для частот проведения эксперимента в первых двух конфигурациях:

$$\xi_1 = \frac{\varphi^{(1)}\varphi^2}{N_1 a_1^6};\ \xi_2 = \frac{\varphi^{(2)}\varphi^2}{N_{22} a_2^6};$$

где

$$\varphi^{(1)} = \frac{N_{12}(N_{22}\varphi - N_{23}\eta)}{N_{13}N_{22} - N_{12}N_{23}}$$

$$\varphi^{(2)} = \frac{N_{22}(N_{13}\eta - N_{12}\varphi)}{N_{13}N_{22} - N_{12}N_{23}} \tag{7}$$

Подставив выражения для частот (7) в уравнение (4), получим соотношение для определения размеров конфигураций:

$$\frac{\varphi^{(1)}}{a_1^2} + \frac{\varphi^{(2)}}{a_2^2} = 1 \tag{8}$$

Частота проведения эксперимента и размеры комплекта звездных точек определяются из выражений (2) и (3):

$$\xi_3 = \frac{\varphi N^{(1)}}{2a_3^2};\ a_3^2 = \frac{\eta^{(1)}}{N^{(1)}},\ \text{где}\quad \eta^{(1)} = \eta - \frac{N_{11}\varphi^{(1)}\varphi}{a_1^2} - \frac{N_{21}\varphi^{(2)}\varphi}{a_2^2}$$

$$N^{(1)} = 1 - \frac{N_{11}\varphi^{(1)}\varphi}{a_1^4} - \frac{N_{21}\varphi^{(2)}\varphi}{a_2^4}. \tag{9}$$

Выражения φ(1) и φ(2) существенно упрощаются, если первой конфигурацией является гиперкуб, а второй – ядро плана Бокса-Бенкина

(N11=N12=N13=N1; N23=0). Тогда: φ(1)=φ ; φ(2)=η - φ

Соответственно:

$$\xi_1 = \frac{\varphi^3}{N_1 a_1^6}; \quad \xi_2 = \frac{\varphi^2(\eta-\varphi)}{N_{22} a_2^6} \qquad \frac{\varphi}{a_1^2} + \frac{\eta-\varphi}{a_2^2} = 1 \tag{10}$$

$$\eta^{(1)} = \eta - \frac{N_{11}\varphi^2}{a_1^2} - \frac{N_{21}\varphi(\eta-\varphi)}{a_2^2}; \quad N^{(1)} = 1 - \frac{N_{11}\varphi^2}{a_1^4} - \frac{N_{21}\varphi(\eta-\varphi)}{a_2^4}$$

Если полиномиальная модель показателя качества процессов в СТС не содержит кубов переменных, то ортогональный план может содержать только две конфигурации: вершины гиперкуба и ядро плана Бокса-Бенкина (середины ребер или центры граней). Условия ортогональности при этом существенно упрощаются и принимают вид:

$$N_1 a_1^2 \xi_1 + N_{21} a_2^2 \xi_2 = \varphi \tag{11}$$

$$N_1 a_1^4 \xi_1 + N_{22} a_2^4 \xi_2 = \varphi^2 \tag{12}$$

$$N_1 a_1^6 \xi_1 + N_{23} a_2^6 \xi_2 = \varphi^3 \tag{13}$$

Решив уравнения (11) – (13), получим следующие выражения и соотношения:

$$\xi_1 = \frac{\varphi^3}{N_1 a_1^6}\left[\varphi - \frac{N_{23}(a_1^2-\varphi)a_2^2}{N_{22}a_1^2 - N_{23}a_2^2}\right]; \qquad \xi_2 = \frac{\varphi^2(a_1^2-\varphi)}{a_2^4(N_{22}a_1^2 - N_{23}a_2^2)}$$

$$\frac{\varphi}{N_1 a_1^4}\left[\varphi - \frac{N_{23}(a_1^2-\varphi)a_2^2}{N_{22}a_1^2 - N_{23}a_2^2}\right] + \frac{N_{21}}{N_{22}}\frac{\varphi(a_1^2-\varphi)}{a_2^4(N_{22}a_1^2 - N_{23}a_2^2)} = 1 \tag{14}$$

Если второй конфигурацией является ядро плана Бокса-Бенкина, то выражения (14) существенно упрощаются:

$$\xi_1 = \frac{\varphi^3}{N_1 a_1^6}; \qquad \xi_2 = \frac{\varphi^2(a_1^2-\varphi)}{N_{22}a_1^2 a_2^4}$$

$$\frac{\varphi^2}{a_1^4} + \frac{N_{21}}{N_{22}}\frac{\varphi^2(a_1^2-\varphi)}{a_1^2 a_2^4} = 1 \tag{15}$$

Рассмотрим случай, когда полиномиальная модель показателя качества процессов в СТС не содержит слагаемых, соответствующих $q_i q_j^2$. Тогда ортогональный план может содержать только вершины гиперкуба и комплекты звездных точек. Условия ортогональности для этого случая принимают вид:

$$N_1 a_1^2 \xi_1 + 2a_2^2 \xi_2 + 2a_3^2 \xi_3 = \varphi \tag{16}$$

$$N_1 a_1^4 \xi_1 + 2a_2^4 \xi_2 + 2a_3^4 \xi_3 = \eta\varphi \tag{17}$$

$$N_1 a_1^4 \xi_1 = \varphi^2 \tag{18}$$

После решения уравнений (16) – (18) получим следующие выражения для частот проведения эксперимента в конфигурациях:

$$\begin{aligned} &\xi_1 = \frac{\phi^2}{N_1 a_1^4};\ \xi_2 = \frac{\phi\left[(a_1^2-\phi)a_3^2-(\eta-\phi)\right]\ a_1^2}{2a_1^2 a_2^2-(a_1^2-\phi)a_2^2} \\ &\xi_3 = \frac{\phi\left[(\eta-\phi)a_1^2-(a_1^2-\phi)a_2^2\right]}{2a_1^2 a_3^2(a_3^2-a_2^2)} \end{aligned} \tag{19}$$

Полиномиальную модель показателя качества процессов в СТС, полученную с помощью ортогональных планов третьего порядка, можно в общем случае представить в виде:

$$\begin{aligned} I = b_0 &+ \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + \sum_{i=1}^{n} b_{ii}(x_i^2-\varphi) + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} b_{ij} x_i x_j + \\ &+ \sum_{i=1}^{n} b_{iii} x_i (x_i^2-\eta) + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} b_{ijj} x_i (x_j^2-\varphi) + \sum_{\substack{i,j,k=1\\ i\neq j\neq k}}^{n} b_{ijk} x_i x_j x_k \end{aligned} \tag{20}$$

Для определения аналитических выражений коэффициентов полиномиальной модели (20) представим матрицу наблюдений Q в виде блочной матрицы.

$$Q = \left[Q_0, Q_i, Q_{ii}, Q_{ij}, Q_{iii}, Q_{ijj}, Q_{ijk}\right],$$

где остальные три подматрицы имеют вид:

$$Q_{iii} = \begin{bmatrix} x_{11}(x_{11}^2-\eta) & x_{21}(x_{21}^2-\eta) & \dots & x_{n1}(x_{n1}^2-\eta) \\ x_{12}(x_{12}^2-\eta) & x_{22}(x_{22}^2-\eta) & \dots & x_{n2}(x_{n2}^2-\eta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1N}(x_{1N}^2-\eta) & x_{2N}(x_{2N}^2-\eta) & \dots & x_{nN}(x_{nN}^2-\eta) \end{bmatrix};$$

$$Q_{ijj}=\begin{bmatrix} x_{11}(x_{21}^2-\varphi) & \dots & x_{n-1,1}(x_{n1}^2-\varphi) \\ x_{12}(x_{22}^2-\varphi) & \dots & x_{n-1,2}(x_{n2}^2-\varphi) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{1N}(x_{2N}^2-\varphi) & \dots & x_{n-1,N}(x_{nN}^2-\varphi) \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$Q_{ijk}=\begin{bmatrix} x_{11}x_{21}x_{31} & \dots & x_{n-2,1}x_{n-1,1}x_{n1} \\ x_{12}x_{22}x_{32} & \dots & x_{n-2,2}x_{n-1,2}x_{n2} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{1N}x_{2N}x_{3N} & \dots & x_{n-2,N}x_{n-1,N}x_{nN} \end{bmatrix}$$

Вектор коэффициентов $\vec{B}$ разобьем на подвекторы:

$$\vec{B}^T=\left[\vec{B}_0^T,\vec{B}_i^T,\vec{B}_{ii}^T,\vec{B}_{ij}^T,\vec{B}_{iii}^T,\vec{B}_{ijj}^T,\vec{B}_{ijk}^T\right] \tag{22}$$

Обращение диагональной нормированной матрицы (1) не представляет затруднений. Производя матричные преобразования с учетом (1), (21) и (22), получим следующее выражение для вектор-столбца коэффициентов:

$$\vec{B}=\begin{bmatrix} \vec{B}_0 \\ \vec{B}_i \\ \vec{B}_{ii} \\ \vec{B}_{ij} \\ \vec{B}_{iii} \\ \vec{B}_{ijj} \\ \vec{B}_{ijk} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_0^T\varepsilon\vec{I} \\ \varphi^{-1}x_i^T\varepsilon\vec{I} \\ \phi^{-1}(\eta-\varphi)^{-1}x_{ii}^T\varepsilon\vec{I} \\ \varphi^{-2}x_{ij}\varepsilon\vec{I} \\ (\lambda_6-\varphi\eta^2)^{-1}x_{iii}^T\varepsilon\vec{I} \\ \varphi^{-2}(\eta-\varphi)^{-1}x_{ijj}^T\varepsilon\vec{I} \\ \varphi^{-3}x_{ijk}^T\varepsilon\vec{I} \end{bmatrix} \tag{23}$$

Запишем выражение (10) в скалярной форме. Коэффициенты, соответствующие первым четырем подвекторам вектора $\vec{B}$, определены.

Выражения для остальных коэффициентов полиномиальной модели имеют вид:

$$b_{iii}=(\lambda_6-\eta\varphi^2)^{-1}\sum_{u=1}^{N}x_{iu}(x_{iu}^2-\eta)I_u\xi_u$$

$$b_{ijj}=(\lambda_{24}-\varphi^3)^{-1}\sum_{u=1}^{N}x_{iu}(x_{ju}^2-\varphi)I_u\xi_u \tag{24}$$

$$b_{ijk}=(\varphi^3)^{-1}\sum_{u=1}^{N}x_{iu}x_{ju}x_{ku}I_u\xi_u$$

Полиномиальная модель третьего порядка вида (20) наиболее полно и адекватно описывает взаимосвязь между параметрами исследуемой СТС и показателями качества процессов.

Литературы

1. Зубарев Ю.Я., Гаскаров В.Д., Удалой В.А., Зубарев В.Ю. Планирование вычислительного эксперимента в электроэнергетике. – СПб.: Энергоатомиздат, 2000. – 328 с.

2. Барщевский Е.Г., Зубарев Ю. Я. Основы вычислительного эксперимента. – СПб.: СПГУВК, 2008. –156 с.

Рецензент проф. Арефьев И.Б.