МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ ПО ПАРАМЕТРУ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ЖИЗНЕННОГО ЦИКЛА

канд. техн. наук, проф. Голик Е.С.,
канд. техн. наук, доц. Афанасьева О.В.

Санкт-Петербургский государственный горный университет
Факультет приборостроения, информационных и электронных систем
Кафедра системного анализа и управления инновациями

Аннотация

В статье рассмотрен метод использования методологических подходов системного анализа к оцениванию продолжительности жизненного цикла (времени жизни) технических систем. Рассмотрены алгоритмы, обеспечивающие вероятностное моделирование функций распределения времен жизни, и других характеристик объектов при ограниченном объеме исходной информации.

Ключевые слова

Методы интерпретации, жизненный цикл, моделирование, алгоритм, закон распределения

Abstract

The article describes a method of using the methodology of the system analysis the duration of life cycle (time life) of technical systems. Probabilistic model considered algorithms for allocation of the functions of the lifetime and other characteristics of the objects with limited background information.

Keywords

Methods of interpretation, lifecycle, modeling, algorithm, distribution law

В анализе данных типа длительность жизненного цикла особый интерес представляют системы, для которых может быть определено событие, часто называемого отказом. Будем считать отказом – момент времени, когда некоторая характеристика (параметр) системы, измеряемая каким-либо количественным способом, падает ниже допустимого уровня, определенного условиями функционирования. В самом общем случае это может быть момент времени, когда обобщенный показатель технического уровня системы станет меньше значения нижней доверительной границы прогнозируемого мирового технического уровня систем-аналогов.

Таким образом, объект исследования сопоставляется с единственной неотрицательной случайной величиной T, представляющей собой эффективный срок жизни системы. Тогда функция «выживания», соответствующая T, определится как вероятность того, что время жизни (наработка) окажется больше t.

Рассмотрим несколько распределений, полезных для решения рассматриваемого класса задач. Известно, что наиболее простое аналитическое выражение имеет экспоненциальное распределение с плотностью вероятностей

$$f\left(t\right)=\lambda e^{-\lambda t}. \quad (1)$$

Так как коэффициент вариации, то есть отношение стандартного отклонения к среднему, равен единице, то его можно использовать в качестве относительного разброса.

Заметим, что экспоненциальное распределение широко применяется в работах по надежности, к экспоненциальному распределению приводят различные идеализированные модели. Однако в связи с тем, что это распределение определяется только одним параметром, основанные на нем методы часто оказываются чувствительными даже к незначительным отклонениям «хвоста» распределения. Поэтому рассмотрим несколько многопараметрических распределений, сводящихся к экспоненциальному при подходящем выборе одного из параметров.

1. СЛОЖНОЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Обозначим длительность периода жизненного цикла t. Очевидно t – случайная величина, которая зависит от ряда экзогенных факторов. Область существования такой случайной величины может быть задана только одним ограничением, а именно, ограничением в интервале $(0,\infty)$. По принципу Джеймса «минимальным произволом» обладает экспоненциальное распределение, поэтому целесообразно представить $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$, где $\lambda=1/\bar{t}$.

Однако предположение о постоянстве параметра λ нереалистично. Это обусловлено причинами кумулятивного характера. Кроме того, величина параметра λ в значительной мере зависит от объема выборки, а также от типа технической системы. Более правдоподобно считать параметр λ случайной величиной с плотностью вероятности $f(\lambda)$. Тогда

$$f(t)=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} f(\lambda)d\lambda . \tag{2}$$

В простейшем случае вариация параметра λ имеет γ-распределение

$$f(\lambda)=\frac{1}{\Gamma(k)}\rho^k \lambda^{k-1} e^{-\rho\lambda}, \tag{3}$$

где k – параметр формы, $k=\bar{\lambda}^2/S^2$; $1/\rho$ – параметр масштаба;

$\rho=\bar{\lambda}/S^2$; $\bar{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$; $\lambda_i=\frac{1}{\bar{t}_i}$; $i=\overline{1,n}$; $\bar{t}_i$ – средняя длительность жизненного цикла i-го типа технической системы.

Основным достоинством распределения (3) является его гибкость, поскольку оно содержит два подгоночных параметра. Можно показать, что приняв $\rho=k/\bar{\lambda}$, $\bar{\lambda}=\lambda_0$, получим $f(t)=\int_0^\infty \lambda e^{-t\lambda}\frac{1}{\Gamma(k)}\left(\frac{k}{\lambda_0}\right)^k \lambda^{k-1} e^{-\lambda\frac{k}{\lambda_0}}d\lambda$.

Вычислив интеграл, определим плотность вероятности сложноэкспоненциального распределения $f(t)=k(k/\lambda_0)^k(k/\lambda_0+t)^{-k-1}$ и интегральный закон распределения

$$F(t)=\int_0^{\infty}\frac{k(k/\lambda_0)^k}{(k/\lambda_0+t)^{k+1}}dt=1-\frac{(k/\lambda_0)^k}{(t+k/\lambda_0)^k}.$$

Заметим, что это одна из модификаций распределения Парето. Его дисперсия превышает дисперсию того предельного экспоненциального распределения, к которому оно сходится при $k\to\infty$.

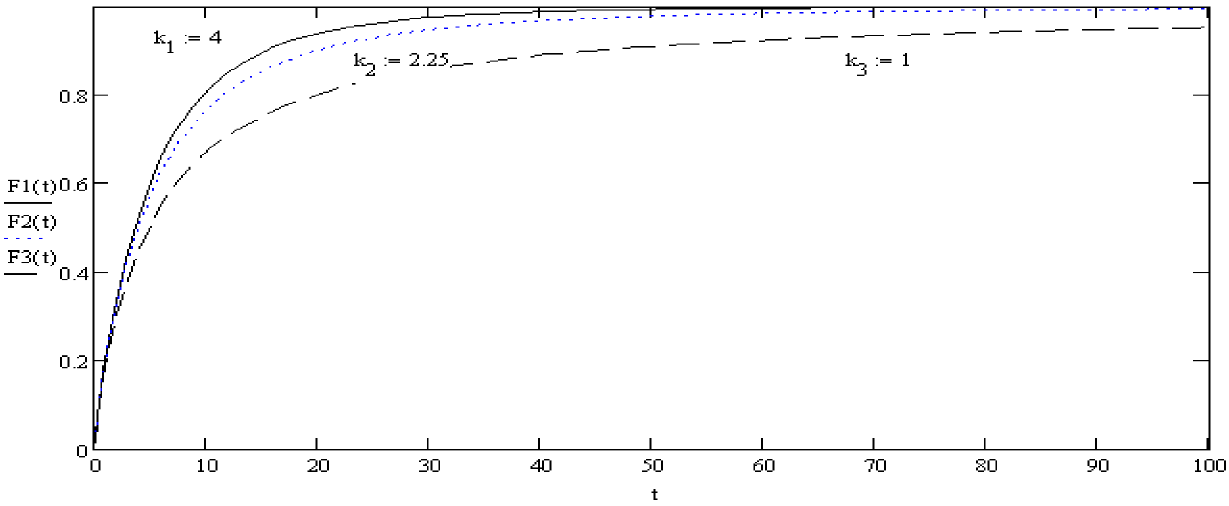

Рис. 1. Интегральный закон распределения $(\lambda=0{,}2)$

График полученных зависимостей представлены на рис. 1, где $F_1(t)$ – интегральный закон распределения при $k=4$, $F_2(t)$ – интегральный закон распределения при $k=2{,}25$, $F_3(t)$ – интегральный закон распределения при $k=1$.

2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГОМПЕРЦА-МАКЕГАМА

Теперь предположим, что параметр интенсивности экспоненциального распределения имеет тенденцию изменения во времени, которая может быть описана каким-либо уравнением тренда, например уравнением модифицированной экспоненты. В этом случае интенсивность будет определяться двумя составляющими: константой a, не зависящей от длительности жизненного цикла технической системы, а слагаемым, экспоненциально растущим с «возрастом»

$$\lambda(t)=a+b\exp(\lambda t). \tag{4}$$

Эта функция, постоянные которой a, b и λ определяются статистическим путем на основе известных алгоритмов, например методом трех сумм или методом трех точек, имеет горизонтальную асимптоту, равную a. Тогда, подставляя выражение (4) в зависимость (1), получим

$$f(t)=\left[a+b\exp(\lambda t)\right]\exp\left\{-at-b/\lambda\left[\exp(\lambda t-1)\right]\right\}. \tag{5}$$

Это дифференциальный закон распределения Гомперца-Макегама. Его частным случаем при $a=0$, то есть в случае представления уравнения тренда интенсивности простой экспонентой, является распределение Гомперца. Последнее при прогнозировании длительности жизненного цикла технических систем представляют особый интерес, так как является стохастическим аналогом весьма известной кривой Гомперца (английский математик Бенджамин Гомперц, 1799 – 1865), широко применяется при аппроксимации статистических данных процессов развития благодаря своей асимметричности.

Распределение Гомперца-Макегама в последнее время вызывает возрастающий интерес у специалистов. Поэтому представляется целесообразным более подробно остановиться на одном из моделирующих алгоритмов, позволяющих получать случайные величины, распределенные по этому закону.

Для построения необходимого алгоритма целесообразно применить метод операторных рядов, тогда случайную величину можно представить в виде

$$\mathrm{X}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(Y+y_0)^{\nu}}{\nu!}D_x^{\nu}\Big|_{x_0}, \tag{6}$$

где Y – случайная величина, равномерно распределенная на интервале $(0,1)$;

D_x^{ν} – оператор преобразования ν-го порядка вида

$$D_x^{\nu}=\frac{1}{\dot{\phi}(x)}\frac{d}{dx} \tag{7}$$

со свойствами: $D_x^{\nu+1} = D\left(D_x^{\nu}\right); D_x^0 = X_0; D_x^1 = 1/\dot{\varphi}(x); \phi\left(x\right)$ – заданная функция распределения искомой случайной величины; $y_0 = \phi\left(x_0\right)$ – значение функции в выбранной опорной точке x_0, в которой $\dot{\phi}\left(x_0\right) \neq 0$.

Распределение Гомперца-Макегама анализировалось по формуле (5), где a, b и λ – некоторые константы при $x \geq 0$.

Выбрав опорную точку $x_0 = 0$ и используя выражение (7), можно получить первые пять членов операторного ряда: $D = \frac{e^{ax+\frac{b}{\lambda}e^{\lambda x-1}}}{a+be^{\lambda x}} \frac{d}{dx}$.

Заметим, что $D_x^0(x_0) = 0$.

Тогда

$$D_x^1(x_0) = \left.\frac{e^{ax+\frac{b}{\lambda}e^{\lambda x-1}}}{a+be^{\lambda x}}\right|_{x_0} = \frac{e^{b/\lambda e^{-1}}}{a+b}; D_x^2(x_0) = \left(D_x^1(x_0)\right)^2 \left[a + \frac{b}{e} - \frac{b\lambda}{a+b}\right];$$

$$D_x^3(x_0) = \left(D_{x_0}^1\right)^3 \left[2\left(a + \frac{b}{e} - \frac{b\lambda}{a+b}\right)^2 - \frac{b\lambda}{e} - \frac{ab\lambda^2}{\left(a+b\right)^2}\right];$$

$$D_x^4(x_0) = \left(D_{x_0}^1\right)^4 \left[6\left(a + \frac{b}{e} - \frac{b\lambda}{a+b}\right)^3 + 7\left(a + \frac{b}{e} - \frac{b\lambda}{a+b}\right) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left(\frac{b\lambda}{e} - \frac{ab\lambda^2}{\left(a+b\right)^2}\right) + \frac{b\lambda^2}{e} - \frac{ab\lambda^3\left(a-b\right)}{\left(a+b\right)^3}\right].$$

Используя приведенные выражения и выражение (6) легко построить алгорим и процедуру получения случайного, подчиняющегося распределению Гомперца-Макегама, для конкретных a, b и λ. Заметим, что при построении этой процедуры целесообразно получать случайные числа по заданным параметрам плотность распределения, используя метод операторных рядов, а также датчик случайных чисел, равномерно распределенных в интервале от 0 до 1.

Проверку работоспособности построенной процедуры легко осуществить, сравнив график плотности распределения и гистограммы для выборки случайных чисел, вычисленных этой процедурой.

3. ДВОЙНОЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

При прогнозировании длительности жизненного цикла технических систем встречаются задачи, связанные с экстремальными (максимальными или минимальными) значениями из некоторого набора случайных величин. Наиболее наглядной из них является задача о времени внедрения (длительности реализационного периода жизненного цикла) технической системы, состоящей из n однотипных модулей. Если i_i – время внедрения i-го модуля, то время, равное длительности реализационного периода системы, определяется самым протяженным лагом внедрения, то есть равно максимуму $T_n = \max(t_1,\ldots,t_n)$.

Классическая теория экстремальных значений в основном имеет дело со свойствами распределения максимума π независимых и одинаково распределенных случайных величин.

Известно, что экстремальные распределения экстремальных случайных величин имеют одну из следующих трех экспоненциальных форм, называемых тремя распределениями экстремальных значений.

Тип 1: $g(x) = \exp\left(-e^{-x}\right)$, $-\infty < x < \infty$.

Тип 2: $g(x) = \begin{cases} 0, x \le 0, \\ \exp\left(-x^{-a}\right), \end{cases}$ для некоторого $a \ge 0$; $x > 0$.

Тип 3: $g(x) = \begin{cases} 1, x \ge 0, \\ \exp\left(-\left(-x^{a}\right)\right), \end{cases}$ для некоторого $a > 0$; $x \le 0$.

Продолжая рассматривать семейство экспоненциальных распределений, приведем алгоритм моделирования двойного экспоненциального распределения экстремальных случайных величини, имеющего следующую плотность вероятностей (частный случай распределения типа 1):

$$g(x) = -\frac{a}{\mathrm{E}_i(1/\lambda)} \exp\left[-\frac{1}{\lambda}\exp(ax)\right], \text{ при } x \geq 0, \qquad (8)$$

где a, λ – параметры распределения;

E_i – интегральная показательная функция.

Данное распределение имеет максимум $\mathrm{E}\left[\exp(a\,x)\right]$ при заданной энтропии. Для выбранных значений $a=1$ и $\lambda=1$ выражение для плотности распределения примет следующий вид: $g(x) = \exp\left[-\exp(x)\right]/0{,}2194$.

Тогда оператор $D = d/dx\, g(x) = k\exp\left[\exp(x)\right] d/dx$, (9)

где $k = 0{,}2194$.

Так как $g(0) \neq 0$, то в качестве опорной точки целесообразно выбрать $x_0 = 0$. В соответствии с формулой (9) получим:

$$D_x^1 = k\exp\left[\exp(x)\right]\Big|_{x_0=0} = ke,$$

$$D_x^2 = k^2\exp\left[2\exp(x)+x\right]\Big|_{x_0=0} = (ke)^2,$$

$$D_x^3 = k^3\exp\left[3\exp(x)+x\right]\left[2\exp(x)+1\right]\Big|_{x_0=0} = 3(ke)^3,$$

$$D_x^4 = k^4\exp\left[4\exp(x)+x\right]\left[6\exp(2x)+7\exp(x)+1\right]\Big|_{x_0=0} = 14(ke)^4 \ldots$$

и т.д.

Нетрудно заметить, что в общем случае

$$D_x^{\nu}\Big|_{x_0=0} = k^{\nu}\exp\left[\nu\exp(x)+x\right]\psi_{\nu}(x)\Big|_{x_0=0} = (ke)^{\nu}\psi_{\nu}(0),$$

где $\psi_{\nu}(x)$ – полином степени $(\nu-2)$, определяемый из следующего рекуррентного соотношения:

$$\psi_{\nu+1}(x) = \dot{\psi}_{\nu}(x) + \left[\nu\exp(x)+1\right]\psi_{\nu}(x)\ , \ \ \psi_1(x) = \psi_2(x) = 1,$$

получаемого в результате последовательного применения операторов к $(\nu+1)$-му члену разложения операторного ряда:

$$D_x^{\nu+1} = D\left(D_x^{\nu}\right) = k\exp\left[\exp(x)\right]d\big/dx\left\{k^{\nu}\exp\left[\nu\exp(x)+x\right]\psi_{\nu}(x)\right\} =$$

$$= k^{\nu+1}\exp\left[\exp(x)\right]\left\{\exp\left[\nu\exp(x)+x\right]\dot{\psi}_{\nu}(x) + \exp\left[\nu\exp(x)+x\right]\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left[\nu\exp(x)+1\right]\psi_{\nu}(x)\right\} = k^{\nu+1}\exp\left[(\nu+1)\exp(x)+x\right]\psi_{\nu+1}(x).$$

Если ограничиться несколькими первыми членами ряда, то модулирующий алгоритм при условии выбора начальной точки $x_0 = 0$ примет следующий вид:

$$x = \alpha ke\big/1! + (\alpha ke)^2\big/2! + 3(\alpha ke)^3\big/3! + 14(\alpha ke)^4\big/4! + 89(\alpha ke)^5\big/5!\ldots,$$

где α – случайная величина, равномерно распределенная в интервале $(0,1)$.

3. ДЕТЕРМИНИСТСКАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛИТЕЛЬНОСТЬ ЖИЗНЕННОГО ЦИКЛА ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Детерминистский подход базируется на дальнейшей трансформации математической модели, используемой для определения периода упреждения прогноза. В основу этой модели положены ретроспективные данные.

Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что элементарное приращение продолжительности жизненного цикла технической системы ΔT будет пропорционально: абсолютному (полному) периоду T, приращению показателя, характеризующего технический уровень ΔQ, и некоторой функции $F(Q)$, зависящей от изменения технического уровня во времени t.

Таким образом, $$\Delta T = TF(Q)\Delta Q. \qquad (10)$$

Исходя из того, что любой образец и процесс своего развития и совершенствования достигает предела, можно заключить: при достаточно большом времени t ($t \to T$), значение функции $F(Q)$ стремится к нулю или постоянное величине, то есть $\lim\limits_{t \to T} F(Q) = 0$.

Заметим, что при $t \to T$ нормированное значение технического уровня стремится к своему максимуму, то есть к единице, выше изложенному условию соответствует функция $$F(Q) = 1 - Q. \qquad (11)$$

Переходя в (10) от приращений к дифференциалам и учитывая (11), получим дифференциальное уравнение для определения продолжительности жизненного цикла образца в зависимости от его технического уровня:

$$dT/T = (1 - Q)dQ. \qquad (12)$$

Решение этого уравнения имеет следующий вид: $\ln T = Q - \frac{1}{2}Q^2 + \ln C$.

При условии, что новая техническая система создается на уровне прототипа, ее жизненный цикл практически не будет отличаться от жизненного

цикла, который имела система-прототип. Постоянная может быть найдена из условий $Q = Q_0$ при $T = T_0$, где Q_0 и T_0 – показатель технического уровня и продолжительности жизненного цикла прототипа соответственно.

В этом случае

$$\ln C = \ln T_0 - Q_0 + Q_0^2/2$$

и

$$T = T_0 \exp\left[Q - 0{,}5Q^2 + Q_0\left(0{,}5Q_0 - 1\right) \right].$$

Если нормирование показателя технического уровня произвести по отношению к значению Q, то последнее выражение примет вид

$$T = T_0 \exp\left[0{,}5 + Q_0 / Q \left(0{,}5 Q_0 / Q - 1\right)\right] .$$

Таким образом, мы получим детерминистский аналог одного из распределений семейства экспоненциальных.

В качестве примера определим прогнозное значение длительности жизненного цикла технической системы, имеющей нормированный показатель технического уровня, равный 0,9 при условии, что прототип характеризуется следующими параметрам: $Q_0 = 0{,}2$ и $T_0 = 9$ лет.

Тогда $T = 9 \exp\left[0{,}5 + 0{,}2/0{,}9\left(0{,}5 + 0{,}2/0{,}9 - 1\right)\right] = 12$ лет.

Литература

1. Мартыщенко, Л.А. Теоретические основы информационно-статистического анализа сложных систем /Л.А. Мартыщенко [и др.]. Лань. – 1997.

2. Переверзев, Е.С. Надежность и испытания технических систем /Е.С. Переверзев. – Киев. Наукова думка, 1990. – 328 с.

3. Голик, Е.С. Теория и методы статистического прогнозирования /Е.С. Голик, О.В. Афанасьева. – СПб.: СЗТУ, 2008.

Рецензент проф. Сикарев А.А.