ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА В ВИДЕ СУММЫ НАТУРАЛЬНЫХ СЛАГАЕМЫХ

док-р техн. наук, проф. Романов В.Н.

Санкт-Петербургский государственный горный университет
Факультет приборостроения, информационных и электронных систем
Кафедра системного анализа и управления инновациями

Аннотация

Решена задача представления положительного числа в виде суммы натуральных слагаемых.

Ключевые слова

Теория чисел, представление положительного числа в виде суммы натуральных слагаемых.

Abstract

In this paper the problem of representation of positive integer number as a sum of natural terms is solved.

Keywords

Theory of numbers, representation of positive number as a sum of natural terms.

Задача формулируется в следующем виде. Дано целое положительное число n. Требуется найти число его различных представлений в виде суммы натуральных слагаемых. Решение этой задачи имеет значение для теории чисел, теории конечных абелевых групп и других приложений. Непосредственным поводом для написания статьи послужила теорема Тома о группах кобордизмов, в которой дифференциальная структура группы характеризуется числом представлений натурального числа в виде суммы натуральных слагаемых. Обозначим $C(n)$ – искомое число представлений числа в виде суммы слагаемых, и пусть $n = n$ – тождественное представление. Назовем число представлений n в виде суммы слагаемых с учетом тождественного представления собственным представлением $C_S(n)$, а без учета тождественного представления – несобственным представлением $C_{NS}(n)$. Очевидно, что $C_{NS}(n) = C_S(n) - 1$. В дальнейшем мы будем говорить только о собственном представлении и опускать нижний индекс, что не приводит к недоразумениям. Мы укажем алгоритм подсчета $C(n)$, выполнение которого позволяет решить сформулированную задачу для произвольного n, и приведем рекуррентное соотношение, позволяющее понизить размерность задачи. Для произвольного натурального n имеем

$$C(n) = \pi_1(n) + \pi_2(n) + \pi_3(n) + \ldots + \pi_{n-1}(n) + \pi_n(n), \qquad (1)$$

где $\pi_1(n) = 1$ – число представлений n в виде суммы единиц: $n = 1 + 1 + \ldots + 1$; $\pi_2(n)$ – число представлений n в виде суммы единиц и хотя бы одной двойки; $\pi_3(n)$ – число представлений n в виде суммы единиц, двоек и хотя бы одной тройки и т.д. $\pi_{n-1}(n)$ – число представлений n в виде суммы единиц, двоек и т.д. и хотя бы одного числа ($n-1$); $\pi_n(n) = 1$ – число тождественных представлений. Для понижения размерности задачи используем следующие легко выводимые соотношения:

$$\pi_1(n) = \pi_1(n-1) = 1; \quad \pi_2(n) = \pi_1(n-2) + \pi_2(n-2); \quad \pi_3(n) = \pi_1(n-3) + \pi_2(n-3) + \pi_3(n-3)$$

и т.д.

Вообще для произвольного l можно записать

$$\pi_l(n) = \pi_1(n-l) + \pi_2(n-l) + \ldots + \pi_l(n-l), \qquad (2)$$

где $\pi_l(n)$ – число представлений n в виде суммы хотя бы одного l и чисел меньших l, $\pi_1(n-l)$ – число представлений $n-l$ в виде суммы единиц: $\pi_1(n-l) = 1$. $\pi_2(n-l)$ – число представлений $n-l$ в виде суммы единиц и хотя бы одной двойки; и т.д. $\pi_l(n-l)$ – число представлений $n-l$ в виде суммы хотя бы одного числа l и чисел меньших l. Соотношение (2) доказывается индукцией по n. Имеет место также следующее соотношение, выводимое из (2)

$$\pi_{n-l}(n) = \pi_1(l) + \pi_2(l) + \ldots + \pi_{n-l}(l). \qquad (3)$$

Ясно, что для расчетов лучше использовать (2) при $n - l \le l$ и (3) при $n - l > l$. Соотношения (2), (3) дают возможность понизить размерность и выполнять вычисления для наименьшего из двух чисел l и $n-l$, то есть использовать представления для чисел, меньших или равных $n/2$. Отметим также, что часть слагаемых в (2), (3) может обращаться в нуль. Вообще говоря, при расчете $\pi_l(n)$ важна только разность $n-l$ и число l. Если для двух чисел n_1, n_2 и двух других l_1, l_2, таких что $l_1 < n_1$, $l_2 < n_2$, $n_1 - l_1 < l_1$, $n_2 - l_2 < l_2$, $n_1 - l_1 = n_2 - l_2$, то имеет место соотношение

$$\pi_{l_1}(n_1) = \pi_{l_2}(n_2). \tag{4}$$

При определенном упорстве можно свести вычисление числа представлений произвольного n в виде суммы хотя бы одного l и чисел меньших l, то есть $\pi_l(n)$, к последовательности вычислений сумм представлений в интервале от 1 до 10 (см. пример ниже). Общее число представлений n в виде суммы слагаемых сводится к таким вычислениям. В табл. 1 даны результаты расчетов числа представлений в виде суммы слагаемых для чисел от 1 до 25. Здесь же приведены значения составляющих $\pi_l(n)$ для разных l, рассчитанные по приведенному алгоритму. Рассмотрим конкретный пример расчета. Пусть $n = 10$. Запишем представление (1) для данного случая

$$C(10) = \pi_1(10) + \pi_2(10) + \pi_3(10) + ... + \pi_9(10) + \pi_{10}(10), \tag{5}$$

где в соответствии с (2)

$$\pi_1(10) = \pi_1(9) = 1,$$

$$\pi_2(10) = \pi_1(8) + \pi_2(8) = \pi_1(8) + \pi_1(6) + \pi_2(6) = \pi_1(8) + \pi_1(6) + \pi_1(4) + \pi_2(4) =$$
$$\pi_1(8) + \pi_1(6) + \pi_1(4) + \pi_1(2) + \pi_2(2) = 1+1+1+1+1 = 5;$$

$$\pi_3(10) = \pi_1(7) + \pi_2(7) + \pi_3(7) = \pi_1(7) + \pi_1(5) + \pi_2(5) + \pi_1(4) + \pi_2(4) + \pi_3(4) =$$
$$\pi_1(7) + \pi_1(5) + \pi_1(3) + \pi_2(3) + \pi_1(4) + \pi_1(2) + \pi_2(2) + \pi_1(1) = 1+1+1+1+1+1+1+1 = 8;$$

$$\pi_4(10) = \pi_1(6) + \pi_2(6) + \pi_3(6) + \pi_4(6) = 1+3+3+2 = 9;$$

$$\pi_5(10) = \pi_1(5) + \pi_2(5) + \pi_3(5) + \pi_4(5) + \pi_5(5) = 1+2+2+1+1 = 7;$$

$$\pi_6(10) = \pi_1(4) + \pi_2(4) + \pi_3(4) + \pi_4(4) = 1+2+1+1 = 5;$$

$$\pi_7(10) = \pi_1(3) + \pi_2(3) + \pi_3(3) = 1+1+1 = 3;$$

$$\pi_8(10) = \pi_1(2) + \pi_2(2) = 1+1 = 2;$$

$$\pi_9(10) = \pi_1(1) = 1;$$

$$\pi_{10}(10) = 1.$$

Слагаемые $\pi_2(5)$, $\pi_3(5)$, $\pi_2(4)$ можно было бы упростить, мы этого не делаем, чтобы не загромождать изложение. Для упрощения $\pi_6(10)$, $\pi_7(10)$, $\pi_8(10)$ мы использовали (3). Отметим, что, применяя последовательно правила понижения размерности, можно все вычисления в примере свести к сумме, содержащей только $\pi(1)$, $\pi(2)$ и $\pi(3)$. Суммируя полученные результаты, получаем представление $C(10) = 42$. Несобственное представление на единицу меньше. Можно было бы попытаться получить конечные выражения для отдельных составляющих в (2). В частности, для $\pi_2(n-l)$ это сделать довольно просто. Применяя последовательно (2) к $\pi_2(n-l)$, получаем

$$\pi_2(n-l) = \pi_1(n-l-2) + \pi_1(n-l-4) + ... + \pi_1(n-l-2k) + \pi_2(n-l-2k) = k+1, \qquad (6)$$

где $k = \left[\dfrac{n-l-2}{2}\right]$ – целая часть числа в скобках. Для $\pi_3(n-l)$ соотношение имеет вид

$$\pi_3(n-l) = 1 + \sum_{k=1}^{t}\left[\frac{n-l-3k}{2}\right] + \sum_{k=1}^{t_1} 1, \qquad (7)$$

где $t = \left[\dfrac{n-l-2}{3}\right]$, $t_1 = \left[\dfrac{n-l-3}{3}\right]$, $[\bullet]$ – целая часть числа.

Для остальных составляющих удобнее проводить вычисления непосредственно, используя правила упрощения (2) – (4), а также (6), (7).

Таким образом, полученные соотношения позволяют определить число представлений произвольного n в виде суммы натуральных слагаемых. Применение полученных соотношений для больших n не встречает принципиальных трудностей, но является довольно утомительным. Вычисления легко выполнить на ЭВМ по программе, использующей предложенный алгоритм. Иногда полезным оказывается анализ вкладов от различных составляющих. Для облегчения анализа в приложении 1 приводится вспомогательная таблица.

Таблица 1. **Представление чисел от 1 до 25 в виде суммы натуральных слагаемых**

n	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6	π_7	π_8	π_9	π_{10}	π_{11}	π_{12}	π_{13}	π_{14}	π_{15}	$C_S(n)$
1	1															1
2	1	1														2
3	1	1	1													3
4	1	2	1	1												5
5	1	2	2	1	1											7
6	1	3	3	2	1	1										11
7	1	3	4	3	2	1	1									15
8	1	4	5	5	3	2	1	1								22
9	1	4	7	6	5	3	2	1	1							30
10	1	5	8	9	7	5	3	2	1	1						42
11	1	5	10	11	10	7	5	3	2	1	1					56
12	1	6	12	15	13	11	7	5	3	2	1	1				77
13	1	6	14	18	18	14	11	7	5	3	2	1	1			101
14	1	7	16	23	23	20	15	11	7	5	3	2	1	1		135
15	1	7	19	27	30	26	22	15	11	7	5	3	2	1	1	177
16	1	8	21	34	37	35	28	22	15	11	7	5	3	2	1	
17	1	8	24	39	47	44	38	29	22	15	11	7	5	3	2	
18	1	9	27	47	57	58	49	40	30	22	15	11	7	5	3	
19	1	9	30	54	70	71	65	52	41	30	22	15	11	7	5	
20	1	10	33	64	84	90	82	70	54	42	30	22	15	11	7	
21	1	10	37	72	101	110	105	89	73	55	42	30	22	15	11	
22	1	11	40	84	119	136	132	116	94	75	56	42	30	22	15	
23	1	11	44	94	141	163	164	147	123	97	77	56	42	30	22	
24	1	12	48	108	164	199	201	186	158	128	101	77	56	42	30	
25	1	12	52	120	192	235	248	230	201	165	145	101	77	56	42	

n	π_{16}	π_{17}	π_{18}	π_{19}	π_{20}	π_{21}	π_{22}	π_{23}	π_{24}	π_{25}	$C_S(n)$
16	1										231
17	1	1									297
18	2	1	1								385
19	3	2	1	1							490
20	5	3	2	1	1						747
21	7	5	3	2	1	1					892
22	11	7	5	3	2	1	1				1003
23	15	11	7	5	3	2	1	1			1257
24	22	15	11	7	5	3	2	1	1		1578
25	30	22	15	11	7	5	3	2	1	1	1964

Примечание: пустые места в таблице означают нули. Несобственное представление $C_{NS}(n) = C_S(n) - 1$

Приложение 1

В приводимой ниже таблице даны уровни последовательного уменьшения размерности в представлении $\pi_m(n-l)$ в соответствии с (2).

π_1	π_2	π_3	π_4	……	π_m	Уровни представ-ления
1	1	1	1	……	1	$n-l-m$ 1-й уровень
m	$m-1$	$m-2$	$m-3$	……	1	$n-l-2m$ 2-й уровень
S_3^1	S_3^2	S_3^3	S_3^4	……	1	$n-l-3m$ 3-й уровень
…………	…………	…………..	…………..	……	…………..	…………..
S_{r-1}^1	S_{r-1}^2	S_{r-1}^3	S_{r-1}^4	……	1	$n-l-(r-1)m$ (r-1)-й уровень
S_r^1	S_r^2	S_r^3	S_r^4	……	1	$n-l-rm$ r-й уровень

Здесь $S_3^1 = m + (m-1) + ... + 1 = m(m+1)/2$;

$S_3^2 = (m-1) + (m-2) + ... + 1 = m(m-1)/2$ и т.д.

$S_r^1 = S_{r-1}^1 + S_{r-1}^2 + ... + 1$; $S_r^2 = S_{r-1}^2 + S_{r-1}^3 + ... + 1$ и т.д.

Каждое число в столбце i последующего уровня является суммой чисел предыдущего уровня, расположенных в столбцах i, $i+1,\ldots,$ m. Таблица является формальным представлением. Некоторые ее элементы могут давать нулевой вклад в окончательный результат, а некоторые – дополнительные вклады, состоящие из нескольких единиц. Чтобы определить, какие члены π_1, π_2 и т.д. дают вклады в представление данного числа, проводится анализ. Поясним это примером. Пусть требуется определить представление числа $n-l$ по 4, то есть $\pi_4(n-l)$. В этом случае $m=4$, и таблица принимает вид

π_1	π_2	π_3	π_4	Уровни представления
1	1	1	1	$n-l-4$ 1-й уровень
4	3	2	1	$n-l-8$ 2-й уровень
10	6	3	1	$n-l-12$ 3-й уровень
20	10	4	1	$n-l-16$ 4-й уровень
35	15	5	1	$n-l-20$ 5-й уровень
56	21	6	1	$n-l-24$ 6-й уровень
…………	…………..	………….	………….	……………….

В таблице π_1 соответствует представлению в виде суммы единиц, π_2 – представлению в виде единиц и хотя бы одной двойки, π_3 – в виде единиц, двоек и хотя бы одной тройки, π_4– в виде хотя бы одной четверки и чисел меньше четырех. С увеличением номера уровня значение аргумента у чисел π_2, π_3, π_4 уменьшается, и они последовательно приводятся к π_1. Уровни таблицы определяются вычетом по четыре, а вклады в представление данного числа $n-l$ вычетами по 2, 3 и 4: $\left[\frac{n-l-2}{2}\right];\left[\frac{n-l-3}{3}\right];\ \left[\frac{n-l-4}{4}\right]$. Если требуется определить представление числа $n-l$ по i, то есть $\pi_i(n-l)$, то уровни таблицы определяются вычетом по $i: \left[\frac{n-l-i}{i}\right]$, а вклады в представление вычетами по $2,3,4,...,i$: $\left[\frac{n-l-2}{2}\right]$, $\left[\frac{n-l-3}{3}\right]$ и т.д. $\left[\frac{n-l-i}{i}\right]$.

Проведем расчеты $\pi_4(n-l)$ с использованием таблицы для нескольких $n-l$. Для $n-l=8$ имеем первый уровень. Дополнительные вклады по сравнению с данными таблицы на первом уровне определяются следующим образом: $\left[\frac{n-l-4-4}{4}\right]=0$ (вклад 0); $\left[\frac{n-l-4-3}{3}\right]=0$ (вклад 0); $\left[\frac{n-l-4-2}{3}\right]=0$ (вклад 0); $\left[\frac{n-l-4-2}{2}\right]=1$ (вклад 1). Окончательно, имеем $\pi_4(8)=1+2+1+1=5$. Для $n-l=9$ дополнительные вклады равны (указаны только вклады отличные от 0): $\left[\frac{n-l-4-3}{2}\right]=1$; $\left[\frac{n-l-4-2}{2}\right]=1$. Окончательно, имеем $\pi_4(9)=1+3+1+1=6$. Для $n-l=10$ дополнительные вклады равны: $\left[\frac{n-l-4-4}{2}\right]=1$; $\left[\frac{n-l-4-3}{3}\right]=1$; $\left[\frac{n-l-4-3}{2}\right]=1$; $\left[\frac{n-l-4-2}{2}\right]=2$. Окончательно, имеем $\pi_4(10)=1+5+2+1=9$. Для $n-l=11$ дополнительные вклады равны: $\left[\frac{n-l-4-4}{3}\right]=1$; $\left[\frac{n-l-4-4}{2}\right]=1$; $\left[\frac{n-l-4-3}{3}\right]=1$; $\left[\frac{n-l-4-3}{2}\right]=2$; $\left[\frac{n-l-4-2}{2}\right]=2$. Окончательно, имеем $\pi_4(11)=1+6+3+1=11$. Для $n-l=12$ дополнительные вклады отсутствуют (по сравнению с данными таблицы на третьем уровне). Окончательно, имеем $\pi_4(12)=10+5+0+0=15$. Для $n-l=13$ дополнительные вклады равны (по сравнению с данными таблицы на третьем уровне): $\left[\frac{n-l-4-6}{2}\right]=1$. Окончательно, имеем $\pi_4(13)=10+7+1+0=18$. Для $n-l=14$ дополнительные вклады равны $2\cdot\left[\frac{n-l-12}{2}\right]=2$; $\left[\frac{n-l-10}{2}\right]=2$; $\left[\frac{n-l-11}{2}\right]=1$; Окончательно, имеем $\pi_4(14)=10+11+2+0=23$. Для $n-l=15$ вклады равны: $\left[\frac{n-l-10}{2}\right]=2$; $\left[\frac{n-l-11}{2}\right]=2$;

$2\cdot\left[\frac{n-l-12}{2}\right]=2$; $2\cdot\left[\frac{n-l-13}{2}\right]=2$. Окончательно, имеем $\pi_4(15)=10+14+3+0=27$.

Приведенных примеров достаточно.

Рецензент доц. Клавдиев А.А.